解析学 II　解答例

2011.05.09

問題　初期値問題

$$f(0) = 1, \qquad f'(x) = f(x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

の解 $f(x)$ は

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

と表せることを示せ.

（解） 解 $f(x)$ が $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ と表されるとすると，$f(0) = a_0$,

$$f'(x) = \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, x^n\right]' = \left[a_0 + \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}\, x^{n+1}\right]' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\ a_{n+1}\, x^n$$

より，漸化式

$$a_0 = 1, \qquad (n+1)\ a_{n+1} = a_n \quad (n \geq 0)$$

が得られる．$b_n = n!\, a_n$ とおくと，$b_0 = 0!\, a_0 = 1 \cdot 1 = 1$ であり，すべての $n \geq 0$ に対して

$$b_{n+1} = n!\ (n+1)\ a_{n+1} = n!\, a_n = b_n$$

が成り立つので，すべての $n \geq 0$ に対して $b_n = 1$，つまり，$a_n = 1/n!$ である．したがって，$f(x)$ は

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

と表される．■