解析学 II　解答例

2011.05.16

問題　指数関数 e^z が

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \qquad z \in \mathbb{C}$$

とベキ級数表示できることを用いて,

$$\sin z = \frac{e^{i\,z} - e^{-i\,z}}{2\,i}, \qquad \cos z = \frac{e^{i\,z} + e^{-i\,z}}{2}$$

をベキ級数で表示せよ.

(解) $i^2 = -1$ であることに注意すると,

$$e^{i\,z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\,z)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\,z)^{2\,n}}{(2\,n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\,z)^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\ z^{2\,n}}{(2\,n)!} + i\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\ z^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!},$$

$$e^{-i\,z} = e^{i\,(-z)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\ (-z)^{2\,n}}{(2\,n)!} + i\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\ (-z)^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\ z^{2\,n}}{(2\,n)!} - i\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\ z^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!}$$

が得られ,

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\ z^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!}, \qquad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\ z^{2\,n}}{(2\,n)!}$$

と表される. ■