解析学 II　解答例

2011.06.13

問題　すべての自然数 n に対して $\cos n\theta$ は $\cos\theta$ の n 次多項式であることが示されているとする．このとき，任意の自然数 n に対して,

$$f(\theta)=\frac{\sin(n+1)\,\theta}{\sin\theta}$$

は $\cos\theta$ の n 次多項式であることを示せ.

（解） $f(\theta)$ は

$$f(\theta)=\frac{e^{i\,(n+1)\,\theta}-e^{-i\,(n+1)\,\theta}}{e^{i\,\theta}-e^{-i\,\theta}}=e^{-i\,n\,\theta}\cdot\frac{e^{i\,2\,(n+1)\,\theta}-1}{e^{i\,2\,\theta}-1}=e^{-i\,n\,\theta}\sum_{k=0}^{n}e^{i\,2\,k\,\theta}=\sum_{k=0}^{n}e^{i\,(2\,k-n)\,\theta}$$

と表せる．(a) n が偶数（$n=2\,\ell$）のとき，変数変換 $m=\ell-k$，$j=k-\ell$ により

$$\begin{aligned}f(\theta)&=\sum_{k=0}^{\ell-1}e^{i\,2\,(k-\ell)\,\theta}+1+\sum_{k=\ell+1}^{n}e^{i\,2\,(k-\ell)\,\theta}=1+\sum_{m=1}^{\ell}e^{-i\,2\,m\,\theta}+\sum_{j=1}^{\ell}e^{i\,2\,j\,\theta}\\&=1+\sum_{k=1}^{\ell}\left\{e^{i\,2\,k\,\theta}+e^{-i\,2\,k\,\theta}\right\}=1+2\sum_{k=1}^{\ell}\cos 2\,k\,\theta\end{aligned}$$

となるので，$f(\theta)$ は $\cos\theta$ の n 次多項式である．(b) n が奇数（$n=2\,\ell-1$）のとき，変数変換 $m=\ell-k-1$，$j=k-\ell$ により

$$\begin{aligned}f(\theta)&=\sum_{k=0}^{\ell-1}e^{-i\,\{2\,(\ell-k-1)+1\}\,\theta}+\sum_{k=\ell}^{2\,\ell-1}e^{i\,\{2\,(k-\ell)+1\}\,\theta}=\sum_{m=0}^{\ell-1}e^{-i\,(2\,m+1)\,\theta}+\sum_{j=0}^{\ell-1}e^{i\,(2\,j+1)\,\theta}\\&=\sum_{k=0}^{\ell-1}\left\{e^{i\,(2\,k+1)\,\theta}+e^{-i\,(2\,k+1)\,\theta}\right\}=2\sum_{k=0}^{\ell-1}\cos\,(2\,k+1)\,\theta\end{aligned}$$

となるので，$f(\theta)$ は $\cos\theta$ の n 次多項式である．■