解析学 II　解答例

2011.06.27

問題　$0 \leq \alpha < 1$ とするとき，広義積分

$$\int_0^{+\infty} \frac{z^\alpha}{1+z^2}\,dz$$

が存在することを示せ．

（解） $x \geq 0$ に対して

$$f(x) = \int_0^x \frac{z^\alpha}{1+z^2}\,dz$$

とおくと，$f(x)$ は単調増加関数である．すべての $z \geq 0$ に対して $\dfrac{z^\alpha}{1+z^2} < z^{\alpha-2}$ であることに注意すると，$x \to +\infty$ のとき

$$f(x) - f(1) \leq \int_1^x \frac{z^\alpha}{1+z^2}\,dz = \int_1^x z^{\alpha-2}\,dz = \left[\frac{z^{\alpha-1}}{\alpha-1}\right]_1^x = \frac{x^{\alpha-1}-1}{\alpha-1} \leq \frac{1}{1-\alpha}$$

となるので，$f(x)$ は上に有界である．したがって，極限

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{z^\alpha}{1+z^2}\,dz$$

が存在する．■

■参考（$\alpha = 1/2$ のとき）　変数変換 $t = z^{\frac{1}{2}}$ を用い，$1+t^4 = \left(1-\sqrt{2}\,t+t^2\right)\left(1+\sqrt{2}\,t+t^2\right)$ であることに注意すると，

$$\int_1^{+\infty} \frac{z^{\frac{1}{2}}}{1+z^2}\,dz = \lim_{u\to+\infty} g(u),$$

$$g(u) \equiv \int_1^u \frac{2\,t^2}{1+t^4}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_1^u \left(\frac{t}{t^2-\sqrt{2}\,t+1} - \frac{t}{t^2+\sqrt{2}\,t+1}\right)dt$$

となる．また，変数変換 $y = \sqrt{2}\,t \pm 1$ を用いると，$y^2+1 = 2\left(t^2 \pm \sqrt{2}\,t+1\right)$ より

$$\int_1^u \frac{t}{t^2 \pm \sqrt{2}\,t+1}\,dt = \int_{\sqrt{2}\pm1}^{\sqrt{2}\,u\pm1} \frac{y \mp 1}{y^2+1}\,dy = \left[\frac{\log(y^2+1)}{2} \mp \tan^{-1} y\right]_{\sqrt{2}\pm1}^{\sqrt{2}\,u\pm1}$$

となり，

$$\sqrt{2}\,g(u) = \frac{1}{2}\log\frac{\left(\sqrt{2}\,u-1\right)^2+1}{\left(\sqrt{2}\,u+1\right)^2+1} + \frac{1}{2}\log\frac{\left(\sqrt{2}+1\right)^2+1}{\left(\sqrt{2}-1\right)^2+1}$$
$$+\tan^{-1}\left(\sqrt{2}\,u-1\right) + \tan^{-1}\left(\sqrt{2}\,u+1\right) - \tan^{-1}\left(\sqrt{2}+1\right) - \tan^{-1}\left(\sqrt{2}-1\right)$$

が得られる．$\left(\sqrt{2}+1\right)^{-1} = \sqrt{2}-1$ より

$$\tan^{-1}\left(\sqrt{2}+1\right) + \tan^{-1}\left(\sqrt{2}-1\right) = \frac{\pi}{2}$$

であるから，

$$g(u) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \log \frac{u^2 - \sqrt{2}\,u + 1}{u^2 + \sqrt{2}\,u + 1} + \frac{1}{\sqrt{2}}\,\log\left(\sqrt{2} + 1\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\tan^{-1}\left(\sqrt{2}\,u - 1\right) + \tan^{-1}\left(\sqrt{2}\,u + 1\right) - \frac{\pi}{2}\right\}$$

となる． $\lim_{u\to+\infty} \tan^{-1}\left(\sqrt{2}\,u \pm 1\right) = \pi/2$ より

$$\int_1^{+\infty} \frac{z^{\frac{1}{2}}}{1+z^2}\,dz = \lim_{u\to+\infty} g(u) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\log\left(\sqrt{2}+1\right) + \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

である．