解析学概論　解答例

2011.05.23

問題　写像 $\Psi_n : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ を, すべての $n \in \mathbb{N}_0, m \in \mathbb{N}_0$ に対して (1) $\Psi_n(0) = 0$, (2) $\Psi_n(S(m)) = \Psi_n(m) + n$ により定義するとき，すべての n，m，$\ell \in \mathbb{N}_0$ に対して $\Psi_{\Psi_n(m)}(\ell) = \Psi_n(\Psi_m(\ell))$ が成り立つことを示せ.

（解） n，$m \in \mathbb{N}_0$ を任意にとり固定する．(i) $\ell = 0$ のとき,

$$\Psi_{\Psi_n(m)}(0) \overset{(1)}{=} 0 \overset{(1)}{=} \Psi_n(0) \overset{(1)}{=} \Psi_n(\Psi_m(0))$$

より，$\ell = 0$ のとき $\Psi_{\Psi_n(m)}(\ell) = \Psi_n(\Psi_m(\ell))$ が成り立つ．(ii) $\Psi_{\Psi_n(m)}(k) = \Psi_n(\Psi_m(k))$ であると仮定すると,

$$\begin{aligned}
&\Psi_{\Psi_n(m)}(S(k)) \overset{(2)}{=} \Psi_{\Psi_n(m)}(k) + \Psi_n(m) \overset{\text{仮定}}{=} \Psi_n(\Psi_m(k)) + \Psi_n(m) \\
&\overset{\text{分配}}{=} \Psi_n(\Psi_m(k) + m) \overset{(2)}{=} \Psi_n(\Psi_m(S(k)))
\end{aligned}$$

となる．数学的帰納法より，すべての n，m，$\ell \in \mathbb{N}_0$ に対して $\Psi_{\Psi_n(m)}(\ell) = \Psi_n(\Psi_m(\ell))$ が成り立つ．■