解析学概論　解答例

2011.06.06

問題　集合 $X = \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ 上の同値関係

$$(n_1, m_1) \sim (n_2, m_2) \qquad \Longleftrightarrow \qquad n_1 + m_2 = n_2 + m_1$$

に対して $(n, m) \in X$ を代表元とする同値類を $[(n, m)]$ で表し，$\mathbb{Z} = X/\sim$ とおく．写像 $\Phi : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ を

$$\Phi([(n, m)], [(k, \ell)]) = [(n + k, m + \ell)], \qquad [(n, m)],\ [(k, \ell)] \in \mathbb{Z}$$

で定義するとき，Φ は代表元の取り方に依存せずうまく定義できていることを示せ．

（解） $[(n, m)] = [(n', m')]$，$[(k, \ell)] = [(k', \ell')]$ とする．同値類の性質より $(n, m) \sim (n', m')$，$(k, \ell) \sim (k', \ell')$ であり，関係 $\sim$ の定義より

$$n + m' = n' + m, \qquad k + \ell' = k' + \ell$$

が得られる．

$$(n + k) + (m' + \ell') = (n + m') + (k + \ell') = (n' + m) + (k' + \ell) = (n' + k') + (m + \ell)$$

と関係 $\sim$ の定義より $(n + k, m + \ell) \sim (n' + k', m' + \ell')$ であるから，

$$\Phi([(n, m)], [(k, \ell)]) = [(n + k, m + \ell)] = [(n' + k', m' + \ell')] = \Phi([(n', m')], [(k', \ell')])$$

となり，Φ は代表元の取り方に依存せずうまく定義できている．　■