解析学概論　解答例

2011.06.13

問題　集合 $X = \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ 上の同値関係

$$(n_1, m_1) \sim (n_2, m_2) \qquad \Longleftrightarrow \qquad n_1 + m_2 = n_2 + m_1$$

に対して $(n, m) \in X$ を代表元とする同値類を $[(n, m)]$ で表し，$\mathbb{Z} = X/\!\sim$ とおく．$\mathbb{Z}$ 上の二項関係 $\preceq$ を

$$[(n, m)] \preceq [(k, \ell)] \qquad \Longleftrightarrow \qquad n + \ell \leq k + m$$

で定義するとき，二項関係 $\preceq$ は代表元の取り方に依存せずうまく定義できており，$\mathbb{Z}$ 上の順序関係であることを示せ.

(解) うまく定義できていること：　$[(n, m)] = [(n', m')]$，$[(k, \ell)] = [(k', \ell')]$，$[(n, m)] \preceq [(k, \ell)]$ とする．同値関係 $\sim$ および関係 $\preceq$ の定義と同値類の性質より

$$n + m' = n' + m, \qquad k + \ell' = k' + \ell, \qquad n + \ell \leq k + m$$

である.

$$\begin{aligned}(k + m) + (n' + \ell') &= (n' + m) + (k + \ell') = (n + m') + (k' + \ell) \\ &= (n + \ell) + (k' + m') \leq (k + m) + (k' + m')\end{aligned}$$

と簡約法則より $n' + \ell' \leq k' + m'$ が得られる．関係 $\preceq$ の定義より $[(n', m')] \preceq [(k', \ell')]$ となるので，関係 $\preceq$ は代表元の取り方に依存せずうまく定義できている.

　順序関係であること：　(i) $n + m \leq n + m$ と関係 $\preceq$ の定義より，$[(n, m)] \preceq [(n, m)]$ である．(ii) $[(n, m)] \preceq [(k, \ell)]$ かつ $[(k, \ell)] \preceq [(n, m)]$ とする．関係 $\preceq$ の定義より $n+\ell \leq k+m$ かつ $k+m \leq n+\ell$ であるから，$n + \ell = k + m$ が成り立つ．同値関係 $\sim$ の定義より $(n, m) \sim (k, \ell)$ であるから，$[(n, m)] = [(k, \ell)]$ となる．(iii) $[(n, m)] \preceq [(k, \ell)]$ かつ $[(k, \ell)] \preceq [(i, j)]$ とする．関係 $\preceq$ の定義より $n + \ell \leq k + m$ かつ $k + j \leq i + \ell$ であるから,

$$(n + j) + (k + \ell) = (n + \ell) + (k + j) \leq (k + m) + (i + \ell) = (i + m) + (k + \ell)$$

が成り立つ．簡約法則より $n + j \leq i + m$ であるから，関係 $\preceq$ の定義より $[(n, m)] \preceq [(i, j)]$ となる．■