解析学概論　解答例

2011.06.20

問題　自然数 a，b（$a \geq b$）に対して，a を b で割ったときの商を q，余りを r，つまり，

$$a = q\,b + r, \qquad 0 \leq r < b, \qquad q \in \mathbb{N}, \qquad q \in \mathbb{Z}$$

とする．このとき，

$$\gcd(a, b) = \gcd(b, r)$$

が成り立つことを示せ．ここで，$\gcd(x, y)$ は x と y の最大公約数であり，$\gcd(x, 0) = x$ とする．

（解） $s = \gcd(a, b)$，$t = \gcd(b, r)$ とおく．

$s \leq t$ について：　$s = \gcd(a, b)$ より，$a = a'\,s$，$b = b'\,s$ となる整数 a'，b' が取れる．

$$r = a - q\,b = (a' - q\,b')\;s$$

より，s は b と r の公約数である．t は b と r の公約数のうちで最大のものであるから，$s \leq t$ である．

$t \leq s$ について：　$t = \gcd(b, r)$ より，$b = b'\,t$，$r = r'\,t$ となる整数 b'，r' が取れる．

$$a = q\,b + r = (q\,b' + r')\;t$$

より，t は a と b の公約数である．s は a と b の公約数のうちで最大のものであるから，$t \leq s$ である．

以上のことから，$s = t$，つまり，$\gcd(a, b) = \gcd(b, r)$ である．　■