解析学概論　　解答例

2011.06.27

問題　集合 $X=\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ 上の同値関係

$$(n_1,m_1)\approx(n_2,m_2)\qquad\Longleftrightarrow\qquad n_1\,m_2=n_2\,m_1$$

に対して $(n,m)\in X$ を代表元とする同値類を $\langle(n,m)\rangle$ で表し，$\mathbb{Q}=X/\!\approx$ とおく．加法 $\Phi:\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ と乗法 $\Psi:\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ を

$$\begin{aligned}\Phi(\langle(n_1,m_1)\rangle\,,\langle(n_2,m_2)\rangle)&=\langle(n_1\,m_2+n_2\,m_1,m_1\,m_2)\rangle\,,\\ \Psi(\langle(n_1,m_1)\rangle\,,\langle(n_2,m_2)\rangle)&=\langle(n_1\,n_2,m_1\,m_2)\rangle\end{aligned}$$

で定義するとき，加法および乗法における単位元と逆元について調べよ．

(解) 任意の $m\in\mathbb{N}$ に対して，$(0,m)\approx(0,1)$，$(m,m)\approx(1,1)$ より，$\langle(0,m)\rangle=\langle(0,1)\rangle$，$\langle(m,m)\rangle=\langle(1,1)\rangle$ が成り立つことに注意したい．

単位元：　任意の $\langle(n,m)\rangle$ に対して

$$\begin{aligned}\Phi(\langle(n,m)\rangle\,,\langle(0,1)\rangle)&=\langle(n\cdot1+0\cdot m,m\cdot1)\rangle=\langle(n,m)\rangle\,,\\ \Phi(\langle(0,1)\rangle\,,\langle(n,m)\rangle)&=\langle(0\cdot m+n\cdot1,1\cdot m)\rangle=\langle(n,m)\rangle\,,\\ \Psi(\langle(n,m)\rangle\,,\langle(1,1)\rangle)&=\langle(n\cdot1,m\cdot1)\rangle=\langle(n,m)\rangle\,,\\ \Psi(\langle(1,1)\rangle\,,\langle(n,m)\rangle)&=\langle(1\cdot n,1\cdot m)\rangle=\langle(n,m)\rangle\end{aligned}$$

が成り立つので，$\langle(0,1)\rangle$ は加法の単位元，$\langle(1,1)\rangle$ は乗法の単位元である．

加法の逆元：　任意の $\langle(n,m)\rangle\in\mathbb{Q}$ に対して，$(-n,m)\in X$ より $\langle(-n,m)\rangle\in\mathbb{Q}$ であり，$m\cdot m\in\mathbb{N}$ より

$$\begin{aligned}\Phi(\langle(n,m)\rangle\,,\langle(-n,m)\rangle)&=\langle(n\cdot m+(-n)\cdot m,m\cdot m)\rangle=\langle(\{n+(-n)\}\cdot m,m\cdot m)\rangle\\ &=\langle(0\cdot m,m\cdot m)\rangle=\langle(0,m\cdot m)\rangle=\langle(0,1)\rangle\,,\\ \Phi(\langle(-n,m)\rangle\,,\langle(n,m)\rangle)&=\langle((-n)\cdot m+n\cdot m,m\cdot m)\rangle=\langle(\{(-n)+n\}\cdot m,m\cdot m)\rangle\\ &=\langle(0\cdot m,m\cdot m)\rangle=\langle(0,m\cdot m)\rangle=\langle(0,1)\rangle\end{aligned}$$

が成り立つので，$\langle(-n,m)\rangle$ は $\langle(n,m)\rangle$ の逆元である．

乗法の逆元：　$\langle(n,m)\rangle$ を $n\neq0$ をみたす任意の $\mathbb{Q}$ の要素とする．このとき，$n\cdot n\in\mathbb{N}$ であることに注意したい．$(n\cdot m,n\cdot n)\in X$ より $\langle(n\cdot m,n\cdot n)\rangle\in\mathbb{Q}$ であり，$n\cdot n\cdot m\in\mathbb{N}$ より

$$\begin{aligned}\Psi(\langle(n,m)\rangle\,,\langle(n\cdot m,n\cdot n)\rangle)&=\langle(n\cdot n\cdot m,n\cdot n\cdot m)\rangle=\langle(1,1)\rangle\,,\\ \Psi(\langle(n\cdot m,n\cdot n)\rangle\,,\langle(n,m)\rangle)&=\langle(n\cdot n\cdot m,n\cdot n\cdot m)\rangle=\langle(1,1)\rangle\end{aligned}$$

が成り立つので，$\langle(n\cdot m,n\cdot n)\rangle$ は $\langle(n,m)\rangle$ の逆元である．また，任意の $\langle(k,\ell)\rangle\in\mathbb{Q}$ に対して

$$\Psi(\langle(0,m)\rangle\,,\langle(k,\ell)\rangle)=\langle(0,m\cdot\ell)\rangle=\langle(0,1)\rangle\,,\qquad\Psi(\langle(k,\ell)\rangle\,,\langle(0,m)\rangle)=\langle(0,\ell\cdot m)\rangle=\langle(0,1)\rangle$$

となるので，$\langle(0,m)\rangle$ の逆元は存在しない．　■