解析学概論　解答例

2011.07.04

問題　有理数の集合 $\mathbb{Q}$ の部分集合 A, B が,

(D1) $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$, $A \cup B = \mathbb{Q}$, $A \cap B = \varnothing$ である,
(D2) すべての $a \in A$, $b \in B$ に対して $a < b$ である,

をみたすとき，$\max A$ と $\min B$ がともに存在するか．存在する場合には例を示し，そうでない場合には証明を与えよ．

（解） 存在しない．

$p = \max A$ と $q = \min B$ がともに存在すると仮定する．条件 (D1), (D2) および最大元・最小限の定義より，$p \in A \subset \mathbb{Q}$, $q \in B \subset \mathbb{Q}$ であるから，$r = (p+q)/2$ は

$$p < r < q, \qquad r \in \mathbb{Q}$$

をみたす．また，最大元の定義より，すべての $a \in A$ に対して $a \leq p$ が成り立つ．$p < r$ より $r \notin A$ である．同様に $r \notin B$ であることも示せるので，$r \notin A \cup B = \mathbb{Q}$ となり，矛盾である．したがって，$\max A$ と $\min B$ がともに存在することはない．■