解析学概論　解答例

2011.07.11

問題　有理数 p に対して $\mathbb{Q}_p$ を $\mathbb{Q}_p = \{\, r \in \mathbb{Q} \mid r > p \,\}$ で定義するとき，正の有理数 p，q に対して

$$\mathbb{Q}_{pq} = \{\, r_1 r_2 \mid r_1 \in \mathbb{Q}_p, r_2 \in \mathbb{Q}_q \,\}$$

が成り立つことを示せ.

(解) $A = \{\, r_1 r_2 \mid r_1 \in \mathbb{Q}_p, r_2 \in \mathbb{Q}_q \,\}$ とおく.

$A \subset \mathbb{Q}_{pq}$ について：　任意に $r \in A$ をとる．A の定義より，ある $r_1 \in \mathbb{Q}_p$，$r_2 \in \mathbb{Q}_q$ が取れて，$r = r_1 r_2$ と表される．$r_1 > p$，$r_2 > q$ より $r = r_1 r_2 > p r_2 > pq$ となり，$r \in \mathbb{Q}_{pq}$ である．したがって，$A \subset \mathbb{Q}_{pq}$ が得られる.

$\mathbb{Q}_{pq} \subset A$ について：　任意に $r \in \mathbb{Q}_{pq}$ をとり，

$$\alpha = \frac{r - pq}{p + q}, \qquad r_1 = p + \alpha, \qquad r_2 = \frac{r}{r_1}$$

とおく．$r \in \mathbb{Q}$，$r > pq$ より $0 < \alpha \in \mathbb{Q}$，$p < r_1 \in \mathbb{Q}$ となり，$r_2 \in \mathbb{Q}$ が得られる．また，

$$r_2 - q = \frac{r - (p + \alpha)\, q}{r_1} = \frac{pq + (p+q)\,\alpha - (p+\alpha)\, q}{r_1} = \frac{p\alpha}{r_1} > 0$$

であるから，$r = r_1 r_2 \in A$ が成り立つ．したがって，$\mathbb{Q}_{pq} \subset A$ である.

以上から，$\mathbb{Q}_{pq} = \{\, r_1 r_2 \mid r_1 \in \mathbb{Q}_p, r_2 \in \mathbb{Q}_q \,\}$ が成り立つ．■