解析学 I　解答例

2012.10.15

■　数列 $\{a_n\}$，$\{r_n\}$ が

$$0 \le a_{n+1} \le r_n\, a_n, \qquad 0 \le r_n < 1, \qquad n \in \mathbb{N} \tag{E}$$

をみたす．

(1)　すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $r_n \le r$ が成り立つような $0 \le r < 1$ が取れるとき，$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ であることを示せ．

(2)　$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ とならない例があれば示せ．

（解） (1) 関係式より

$$0 \le a_n \le r\, a_{n-1} \le r^2\, a_{n-2} \le \cdots \le r^{n-1}\, a_1 \to 0 \quad (n \to \infty)$$

であるから，挟み撃ちの原理により $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ である．(2)

$$a_n = \frac{n+1}{n}, \qquad r_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n\,(n+2)}{(n+1)^2}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

とおくと，(E) をみたすが，$\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ である．■