解析学 I　解答例

2012.10.22

■　4 次方程式

$$x^4 + x^3 + x^2 + x = 1 \tag{E}$$

について次の問いに答えよ．

(1)　方程式 (E) は整数解をもたないことを示せ．

(2)　方程式 (E) は有理数解をもたないことを示せ．

(解) (1) 方程式 (E) の左辺を因数分解すると，$x^4 + x^3 + x^2 + x = x\,(x+1)\left(x^2+1\right)$ となることに注意したい．方程式 (E) が整数解 x をもつと仮定すると，$x^2 + 1 \geq 1$ であるから $x^2 + 1 = 1$，つまり，$x = 0$ でなければならないが，$x = 0$ のとき (E) の左辺が 0 となり，矛盾である．したがって，方程式 (E) は整数解をもたない．

(2) 方程式 (E) が解 $\alpha \in \mathbb{Q}$ をもつと仮定する．互いに素な $p \in \mathbb{N}$，$q \in \mathbb{Z}$ を用いて $\alpha = q/p$ と表すことができ，$\alpha = q/p$ を方程式 (E) に代入し整理すると

$$q^4 = p\left(p^3 - q^3 - p\,q^2 - p^2\,q\right)$$

が得られる．また，(1) より $\alpha \notin \mathbb{Z}$ であるから，$p \geq 2$ である．$r \geq 2$ を p の任意の素因数とすると，上の関係式より q は r で整除されなければならない，つまり，r は p と p の公約数である．これは p と q の最大公約数は 1 であることに矛盾する．したがって，方程式 (E) は $\mathbb{Q}$ において解をもたない．■