解析学 I　解答例

2012.10.29

■　$0 \leq a < 1$，$0 \leq x_1 < 1$ とし，数列 $\{\, x_n \,\}$ を

$$x_{n+1} = a\, x_n\, (1 - x_n) \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

により定めるとき，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n$ を求めよ．

(解)　$f(x) = a\, x\, (1 - x)$ とおくと，$0 \leq x < 1$ のとき

$$0 \leq f(x) = -a\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{a}{4} \leq \frac{a}{4} < 1$$

である．$\{\, x_n \,\}$ はすべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $x_{n+1} = f(x_n)$ をみたすので，数学的帰納法を用いて，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $0 \leq x_n < 1$ であることが示せる．また，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$x_{n+1} - x_n = a\, x_n\, (1 - x_n) - x_n = x_n\, (a - 1 - a\, x_n) \leq 0$$

が成り立つので，$\{\, x_n \,\}$ は下に有界な単調減少数列である．したがって，$\{\, x_n \,\}$ の極限が存在する．このとき，その極限を x^* とすると，$0 \leq x^* < 1$ であり，

$$0 = \lim_{n\to\infty} \{x_{n+1} - a\, x_n\, (1 - x_n)\} = x^* - a\, x^*\, (1 - x^*) = x^*\, (1 - a + a\, x^*)$$

と $1 - a + a\, x^* > 0$ より，$x^* = 0$ となる．■