解析学 I　解答例

2012.11.05

■　数列 $\{\,x_n\,\}$ を

$$x_1 = 1, \qquad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right) \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

により定めるとき，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n$ を求めよ．

（解） $n \geq 2$ をみたすすべての自然数 n に対して $x_n \geq x_{n+1} \geq \sqrt{2}$ が成り立つことを示す．(a)

$$x_2 = \frac{3}{2}, \qquad x_3 = \frac{17}{12}$$

であるから，$x_2 \geq x_3 \geq \sqrt{2}$ が成り立つ．(b) $x_k \geq x_{k+1} \geq \sqrt{2}$ と仮定すると，相加平均・相乗平均より

$$x_{k+2} = \frac{1}{2}\left(x_{k+1} + \frac{2}{x_{k+1}}\right) \leq \sqrt{x_k \cdot \frac{2}{x_k}} = \sqrt{2}$$

であり，

$$x_{k+2} - x_{k+1} = \frac{1}{2}\left(x_{k+1} + \frac{2}{x_{k+1}}\right) - x_{k+1} = \frac{2 - x_{k+1}^2}{2\,x_{k+1}} \leq 0$$

より $x_{k+1} \geq x_{k+2} \geq \sqrt{2}$ が成り立つ．数学的帰納法により，$n \geq 2$ をみたすすべての自然数 n に対して $x_n \geq x_{n+1} \geq \sqrt{2}$ が成り立つ．数列 $\{\,x_n\,\}_{n\geq 2}$ は単調減少数列で下に有界であるから，$\{\,x_n\,\}_{n\geq 2}$ の極限が存在する．その極限を x^* とおくと，$x^* \geq \sqrt{2}$ であり，漸化式に対して $n \to \infty$ の極限をとると

$$x^* = \frac{1}{2}\left(x^* + \frac{2}{x^*}\right), \qquad \text{つまり} \quad x^* = \sqrt{2}$$

である．■