解析学 I　解答例

2012.11.26

■　$1 < a < 2$ とし，$x_* = (a-1)/a$ とおく．数列 $\{\, x_n \,\}$ を

$$x_1 = \frac{1}{2}, \qquad x_{n+1} = a\, x_n\, (1 - x_n) \quad (n \in \mathbb{N})$$

により定めるとき，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $x_* \le x_{n+1} \le x_n \le 1/2$ が成り立つことを示せ．また，$\lim_{n\to\infty} x_n = x_*$ であることを示せ．

(解)　$x_* < 1/2$，$x_* = a\, x_* \,(1 - x_*)$ であることに注意したい．(i)

$$x_2 = \frac{a}{4} < \frac{1}{2} = x_1, \qquad x_2 - x_* = \frac{(a-2)^2}{4\,a} > 0$$

より $x_* \le x_2 \le x_1 \le 1/2$ が成り立つ．(ii) $x_* \le x_{n+1} \le x_n \le 1/2$ が成り立つと仮定すると，

$$\begin{gathered} x_{n+2} - x_{n+1} = a\, x_{n+1}\,(1 - x_{n+1}) - x_{n+1} = a\, x_{n+1}\,(x_* - x_{n+1}) \le 0, \\ x_{n+2} - x_* = a\, x_{n+1}\,(1 - x_{n+1}) - a\, x_*\,(1 - x_*) = a\,(1 - x_{n+1} - x_*)\,(x_{n+1} - x_*) \ge 0 \end{gathered}$$

となり，$x_* \le x_{n+2} \le x_{n+1} \le 1/2$ が成り立つ．数学的帰納法により，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $x_* \le x_{n+1} \le x_n \le 1/2$ が成り立つ．数列 $\{\, x_n \,\}$ は単調減少で下に有界であるから，極限 $\hat{x} = \lim_{n\to\infty} x_n$ が存在する．漸化式において $n \to \infty$ とすると，$\hat{x} = a\, \hat{x}\, (1 - \hat{x})$ が得られ，$\hat{x} \ge x_* > 0$ より $\hat{x} = x_*$ である．■