解析学 I　解答例

2012.12.03

■　関数 $f_n(x)$ （$n \in \mathbb{N}$）を定数 $c_n > 0$ を用いて $f_n(x) = c_n \sin n\,x$ と定めるとき，$\int_0^\pi \{f_n(x)\}^2\,dx = 1$ をみたすように c_n を定めよ．また，$n \neq m$ のとき $\int_0^\pi f_n(x)\,f_m(x)\,dx$ を求めよ．

（解）半角の公式より

$$1 = \int_0^\pi \{f_n(x)\}^2\,dx = c_n^2 \int_0^\pi \sin^2 n\,x\,dx = \frac{c_n^2}{2}\int_0^\pi (1-\cos 2\,n\,x)\,dx = \frac{c_n^2}{2}\left[x - \frac{\sin 2\,n\,x}{2\,n}\right]_0^\pi = \frac{\pi\,c_n^2}{2}$$

であるから，$c_n = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$ である．また，$n \neq m$ のとき，三角関数の積和公式より

$$\begin{aligned}\int_0^\pi f_n(x)\,f_m(x)\,dx =& \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin n\,x\,\sin m\,x\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \{\cos(n-m)\,x - \cos(n+m)\,x\}\,dx\\ =& \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(n-m)\,x}{n-m} - \frac{\sin(n+m)\,x}{n+m}\right]_0^\pi = 0\end{aligned}$$

が得られる．■