解析学 I　解答例

2012.12.10

■　任意の自然数 n，実数 x_k，y_k　($1 \leq k \leq n$，$k \in \mathbb{N}$) に対して

$$\sum_{k=1}^{n} |\, x_k \,|\, |\, y_k \,| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |\, x_k \,|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{n} |\, y_k \,|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \tag{E}$$

が成り立つことを示せ．

(解)　任意の $\mathbf{x} = (x_k)$，$\mathbf{y} = (y_k) \in \mathbb{R}^n$ に対して $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ を

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k\, y_k$$

により定めるとき，関数 $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は性質

(i)　$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \ \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0; \quad \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$

(ii)　$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}\ \forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \ \langle \alpha\, \mathbf{x}_1 + \beta\, \mathbf{x}_2, \mathbf{y} \rangle = \alpha\, \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{y} \rangle + \beta\, \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{y} \rangle$

(iii)　$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \ \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$

をみたすので，$\mathbb{R}^n$ 上の内積であることに注意したい．$\mathbf{X} = (|\, x_k \,|)$，$\mathbf{Y} = (|\, y_k \,|) \in \mathbb{R}^n$ とおく．$\langle \mathbf{Y}, \mathbf{Y} \rangle = 0$ のときには，性質 (i) より $\mathbf{Y} = \mathbf{0}$ であるから，不等式 (E) の両辺ともに 0 となり，不等式 (E) が成り立つ．したがって，$\langle \mathbf{Y}, \mathbf{Y} \rangle \neq 0$ のとき不等式 (E) が成り立つことを示せばよい．性質 (i) より $\langle \mathbf{Y}, \mathbf{Y} \rangle > 0$ であり，すべての $t \in \mathbb{R}$ に対して

$$0 \leq \langle \mathbf{X} + t\, \mathbf{Y}, \mathbf{X} + t\, \mathbf{Y} \rangle = t^2\, \langle \mathbf{Y}, \mathbf{Y} \rangle + 2\, t\, \langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle + \langle \mathbf{X}, \mathbf{X} \rangle$$

が成り立つので，

$$\{ \langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle \}^2 - \langle \mathbf{X}, \mathbf{X} \rangle\, \langle \mathbf{Y}, \mathbf{Y} \rangle \leq 0$$

でなければならない．したがって，

$$\sum_{k=1}^{n} |\, x_k \,|\, |\, y_k \,| = \langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle \leq \{ \langle \mathbf{X}, \mathbf{X} \rangle \}^{\frac{1}{2}}\, \{ \langle \mathbf{Y}, \mathbf{Y} \rangle \}^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{k=1}^{n} |\, x_k \,| \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{n} |\, y_k \,| \right)^{\frac{1}{2}}$$

となり，不等式 (E) が成り立つ．■