解析学 I　解答例

2012.12.17

■　$p \geq 1$ とし，

$$\| \mathbf{x} \|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} \| x_k \|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \qquad \mathbf{x} = (x_k) \in \mathbb{R}^n$$

により関数 $\| \mathbf{x} \|_p$ を定義するとき，

$$\lim_{p \to +\infty} \| \mathbf{x} \|_p = \max (| x_1 |, | x_2 |, \cdots, | x_n |)$$

が成り立つことを示せ．

（解） $\max (| x_1 |, | x_2 |, \cdots, | x_n |) = | x_\ell |$ すると，

$$| x_\ell |^p \leq \sum_{k=1}^{n} | x_k |^p \leq \sum_{k=1}^{n} | x_\ell |^p = n \, | x_\ell |^p$$

となり，

$$| x_\ell | = (| x_\ell |^p)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} | x_k |^p \right)^{\frac{1}{p}} = \| \mathbf{x} \|_p \leq (n \, | x_\ell |^p)^{\frac{1}{p}} = n^{\frac{1}{p}} \, | x_\ell |$$

が得られる．$n = 1$ のときには明らかに示すべき関係式が成り立つので，$n \geq 2$ の場合を考える．$f(p) = n^{\frac{1}{p}} - 1$ とおくと，$f(p) \geq 0$ である．実数 p に対して p を超えない最大の整数を $[p]$ と表すと，二項定理より

$$n = (1 + f(p))^p \geq (1 + f(p))^{[p]} = \sum_{k=0}^{[p]} {}_{[p]}C_k \, \{f(p)\}^k \geq [p] \, f(p)$$

となり，すべての $p \geq 1$ に対して

$$0 \leq f(p) \leq \frac{n}{[p]}$$

が成り立つ．挟み撃ちの原理より $\lim_{p \to +\infty} f(p) = 0$ となるので，$\lim_{p \to +\infty} n^{\frac{1}{p}} = 1$ である．さらに，挟み撃ちの原理より

$$\lim_{p \to +\infty} \| \mathbf{x} \|_p = | x_\ell | = \max (| x_1 |, | x_2 |, \cdots, | x_n |)$$

が成り立つ．■