

解析学概論 解答例

2012.05.02

問1 対応は $x \mapsto x^2$ で、単射であるが全射ではない例を示せ.

(解) $X = [0, +\infty)$, $Y = \mathbb{R}$ とし, 写像 $p: X \rightarrow Y$ を $p(x) = x^2$ により定義する.

全射ではないこと: $-1 \in Y$ である. 任意の $x \in X$ に対して $p(x) = x^2 \geq 0 > -1$ であるから, 写像 p により $-1 \in Y$ に写される X の要素は存在しない. したがって, p は全射ではない.

単射であること: 任意に $x_1, x_2 \in X$ をとり, $p(x_1) = p(x_2)$ とする. このとき, $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ であり,

$$0 = p(x_1) - p(x_2) = x_1^2 - x_2^2 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2)$$

が得られる. また, $x_1 \geq 0$ かつ $x_2 \geq 0$ であることと, 次の何れかが成り立つことは同値である.

(1) $x_1 > 0$ または $x_2 > 0$.

(2) $x_1 = 0$ かつ $x_2 = 0$.

(1) の場合には, $x_1 + x_2 > 0$ であるから, $x_1 = x_2$ となる. (2) の場合には, 明らかに $x_1 = x_2$ である. いずれの場合にも $x_1 = x_2$ となるので, 写像 p は単射である. ■