

解析学概論 解答例

2012.05.07

問1 $f: X \rightarrow Y$ を写像とする. X の任意の部分集合 A, B に対して

$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$$

が成り立つことを示せ. また, 上の包含関係 \subset において \subsetneq となる例を示せ.

(解) 包含関係の証明: 任意に $y \in f(A \cap B)$ をとる. ある $x \in A \cap B$ が存在して $y = f(x)$ が成り立つ. このとき, $x \in A$ かつ $x \in B$ である. $x \in A$ より $y = f(x) \in f(A)$ であり, $x \in B$ より $y = f(x) \in f(B)$ であるから, $y \in f(A) \cap f(B)$ である. したがって, $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ が成り立つ.

例: 写像 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を $f(x) = x^2$ により定義し, $A = [-1, 0]$, $B = [0, 1]$ とおくと,

$$A \cap B = \{0\}, \quad f(A) = [0, 1], \quad f(B) = [0, 1], \quad f(A \cap B) = \{0\}$$

であるから,

$$f(A \cap B) = \{0\} \subsetneq [0, 1] = f(A) \cap f(B)$$

となる. ■