

解析学概論 解答例

2012.05.14

問1 関係 R は集合 X 上の同値関係であるとし, $C(a) = \{x \in X \mid aRx\}$ とする. このとき, 次が成り立つことを示せ.

- (1) $a \in C(a)$
- (2) $aRb \iff C(a) = C(b)$
- (3) $a \not R b \iff C(a) \cap C(b) = \emptyset$

(解) (1): 反射法則より aRa であるから, $a \in C(a)$ である.

(2): (\Leftarrow) $b \in C(b) = C(a)$ と同値類の定義より, aRb が成り立つ.

(\Rightarrow) 任意に $x \in C(a)$ [$x \in C(b)$] をとると, aRb かつ aRx [bRx] が成り立つ. 対称法則と推移法則より bRx [aRx] が得られ, $x \in C(b)$ [$x \in C(a)$] となる. このとき, $C(a) \subset C(b)$ かつ $C(b) \subset C(a)$ であるから, $C(a) = C(b)$ が成り立つ.

(3): (\Leftarrow) (1), (2) より aRb ならば $C(a) \cap C(b) \neq \emptyset$ が成り立つので, 対偶をとると

$$C(a) \cap C(b) = \emptyset \implies a \not R b$$

が得られる.

(\Rightarrow) $a \not R b$ かつ $C(a) \cap C(b) \neq \emptyset$ と仮定する. $x \in C(a) \cap C(b)$ とすると, $x \in C(a)$ かつ $x \in C(b)$ であるから, aRx かつ bRx が成り立つ. 対称法則と推移法則より aRb となり, 矛盾である. したがって,

$$a \not R b \implies C(a) \cap C(b) = \emptyset$$

が得られる. ■