

解析学概論 解答例

2012.06.04

問1 すべての自然数 n, m に対して $\Phi_{S(m)}(n) = \Phi_m(S(n))$ が成り立つことを示せ.

(解) 自然数 m を任意に取り固定し, n に関する数学的帰納法で証明する. (i)

$$\Phi_{S(m)}(0) \stackrel{\text{定義}}{=} S(m) = S(\Phi_m(0)) \stackrel{\text{定義}}{=} \Phi_m(S(0))$$

より $n = 0$ のとき成り立つ. (ii) n のとき成り立つと仮定すると,

$$\Phi_{S(m)}(\mathbf{S}(n)) \stackrel{\text{定義}}{=} S(\Phi_{S(m)}(n)) \stackrel{\text{仮定}}{=} S(\Phi_m(S(n))) \stackrel{\text{定義}}{=} \Phi_m(S(\mathbf{S}(n)))$$

より, $S(n)$ のときも成り立つ. 数学的帰納法により, すべての自然数 n, m に対して $\Phi_{S(m)}(n) = \Phi_m(S(n))$ が成り立つ. ■