解析学概論　解答例

2012.06.18

問 1　整数の集合 $\mathbb{Z}$ が環であることから，$0 \cdot (-1) = 0$，$(-1) \cdot (-1) = 1$ が成り立つことを示せ．ただし，0 は加法の単位元，1 は乗法の単位元，-1 は加法における 1 の逆元である．

（解） $1 = 1 + 0$ より

$$(-1) \overset{\text{単位元}}{=} 1 \cdot (-1) = (1+0) \cdot (-1) \overset{\text{分配法則}}{=} 1 \cdot (-1) + 0 \cdot (-1) \overset{\text{単位元}}{=} (-1) + 0 \cdot (-1)$$

となり，両辺に 1 を加えると

$$0 \overset{\text{単位元}}{=} 1 + (-1) = 1 + \{(-1) + 0 \cdot (-1)\} \overset{\text{結合法則}}{=} \{1 + (-1)\} + 0 \cdot (-1) \overset{\text{逆元}}{=} 0 + 0 \cdot (-1) \overset{\text{単位元}}{=} 0 \cdot (-1)$$

が得られる．

$$0 = 0 \cdot (-1) \overset{\text{単位元}}{=} \{1 + (-1)\} \cdot (-1) \overset{\text{分配法則}}{=} 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-1) \overset{\text{単位元}}{=} (-1) + (-1) \cdot (-1)$$

であり，上記と同様に，両辺に 1 を加えると

$$1 \overset{\text{単位元}}{=} 1 + 0 \cdot (-1) = 1 + \{(-1) + (-1) \cdot (-1)\} = (-1) \cdot (-1)$$

となる．■