解析学概論　解答例

2012.06.25

問 1　$X = \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ 上の二項関係 $\sim$ を

$$(n, m) \sim (n', m') \qquad \Longleftrightarrow \qquad n + m' = m + n'$$

により定義するとき，$\sim$ は X 上の同値関係であることを示せ．また，同値関係 $\sim$ に関する (n, m) を代表元とする同値類を $[(n, m)]$ と表すとき，各 $n \in \mathbb{N}_0$ に対して同値類 $[(n, 0)]$ および $[(0, n)]$ を内包的記法を用いてできるだけ簡単に表現せよ．

（解）$\sim$ が同値関係であること　(i) 交換法則より $n + m = m + n$ となるので，$(n, m) \sim (n, m)$ が成り立つ．(ii) $(n, m) \sim (n', m')$ とする．定義より $n + m' = m + n'$ であるから，交換法則より

$$n' + m = m + n' = n + m' = m' + n$$

となり，定義より $(n', m') \sim (n, m)$ が成り立つ．(iii) $(n, m) \sim (n', m')$ かつ $(n', m') \sim (n'', m'')$ とする．定義より $n + m' = m + n'$ かつ $n' + m'' = m' + n''$ であるから，結合法則と交換法則より

$$\begin{aligned}(n + m'') + m' =& (n + m') + m'' = (m + n') + m'' = m + (n' + m'') \\ =& m + (m' + n'') = (m + n'') + m'\end{aligned}$$

が得られる．簡約法則より $n + m'' = m + n''$ となり，定義より $(n, m) \sim (n'', m'')$ が成り立つ．以上より，二項関係 $\sim$ は X 上の同値関係である．

同値類 $[(n, 0)]$ および $[(0, n)]$ の表現　集合 A を

$$A = \{\ [(n + k, k)] \mid k \in \mathbb{N}_0\ \}$$

とおくとき，$[(n, 0)] = A$ であることを示す．任意の $k \in \mathbb{N}_0$ に対して，$n + k = 0 + (n + k)$ より $(n, 0) \sim (n + k, k)$ であるから，$(n + k, k) \in [(n, 0)]$ が成り立つ．したがって，$A \subset [(n, 0)]$ である．また，任意に $(k, \ell) \in [(n, 0)]$ をとる．$(k, \ell) \sim (n, 0)$ より $k = k + 0 = n + \ell$ であるから，$(k, \ell) = (n + \ell, \ell) \in A$ となる．したがって，$[(n, 0)] \subset A$ が成り立つ．以上から，$[(n, 0)] = A$ となる．同様に，

$$[(0, n)] = \{\ [(k, n + k)] \mid k \in \mathbb{N}_0\ \}$$

であることが示せる．■