解析学概論　解答例

2012.07.09

問 1　$X = \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ 上の同値関係 $\sim$ を

$$(n,m) \sim (n',m') \qquad \Longleftrightarrow \qquad n+m' = m+n'$$

により定義し，$(n,m) \in X$ を代表元とする同値関係 $\sim$ に関する同値類を $[(n,m)]$ と表す．

(1) 写像 $\Phi([(n,m)], [(k,\ell)]) = [(n+k, m+\ell)]$ は代表元の取り方によらずにうまく定義できていることを示せ．

(2) 商集合 $X/\!\sim$ 上の二項関係 $\preceq$ を

$$[(n,m)] \preceq [(k,\ell)] \quad \Longleftrightarrow \quad n+\ell \le m+k$$

により定義するとき，二項関係 $\preceq$ は代表元の取り方によらずにうまく定義できていることを示せ．

（解）(1)　$[(n,m)] = [(n',m')]$，$[(k,\ell)] = [(k',\ell')]$ とする．同値関係 $\sim$ の定義より $n+m' = m+n'$，$k+\ell' = \ell+k'$ となるので，

$$(n+k)+(m'+\ell') = (n+m')+(k+\ell') = (m+n')+(\ell+k') = (m+\ell)+(n'+k')$$

と同値関係 $\sim$ の定義より

$$\Phi([(n,m)], [(k,\ell)]) = [(n+k, m+\ell)] = [(n'+k', m'+\ell')] = \Phi([(n',m')], [(k',\ell')])$$

が得られる．したがって，写像 Φ は代表元の取り方によらずにうまく定義できている．

(2)　$[(n,m)] = [(n',m')]$，$[(k,\ell)] = [(k',\ell')]$，$[(n,m)] \preceq [(k,\ell)]$ とする．定義より

$$n+m' = m+n', \qquad k+\ell' = \ell+k', \qquad n+\ell \le m+k$$

であるから，

$$\begin{aligned}(m+k)+(n'+\ell') &= (m+n')+(k+\ell') = (n+m')+(\ell+k') \\ &= (n+\ell)+(m'+k') \le (m+k)+(m'+k')\end{aligned}$$

となる．簡約法則より $n'+\ell' \le m'+k'$ であるから，$[(n',m')] \preceq [(k',\ell')]$ が成り立つ．したがって，$X/\!\sim$ 上の二項関係 $\preceq$ は代表元の取り方によらずにうまく定義できている．■