

解析学概論 解答例

2012.07.23

問1 $X = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ 上の二項関係 \approx を

$$(q_1, p_1) \approx (q_2, p_2) \iff p_1 q_2 = p_2 q_1$$

により定義するとき、二項関係 \approx は X 上の同値関係であることを示せ。また、同値関係 \approx に関する (q, p) を代表元とする同値類を $\langle (q, p) \rangle$ と表し、 $\mathbb{Q} = X/\approx$ 上の和 $+$ を

$$\langle (q_1, p_1) \rangle + \langle (q_2, p_2) \rangle = \langle (q_1 p_2 + q_2 p_1, p_1 p_2) \rangle$$

により定義するとき、和 $+$ は代表元の取り方によらずにうまく定義できていることを示せ。

(解) \approx が同値関係であること (i) 定義より明らかに $(q, p) \approx (q, p)$ である。(ii) $(q_1, p_1) \approx (q_2, p_2)$ とする。定義より、 $p_1 q_2 = p_2 q_1$ であるから、 $(q_2, p_2) \approx (q_1, p_1)$ が成り立つ。(iii) $(q_1, p_1) \approx (q_2, p_2)$ かつ $(q_2, p_2) \approx (q_3, p_3)$ とする。定義より $p_1 q_2 = p_2 q_1$ かつ $p_2 q_3 = p_3 q_2$ である。ここで、 $p_2 \neq 0$ であることに注意したい。簡約法則と

$$(p_1 q_3) p_2 = (p_2 q_3) p_1 = (p_3 q_2) p_1 = (p_1 q_2) p_3 = (p_2 q_1) p_3 = (p_3 q_1) p_2$$

より $p_1 q_3 = p_3 q_1$ が得られる。定義より $(q_1, p_1) \approx (q_3, p_3)$ が成り立つ。以上より、二項関係 \approx は X 上の同値関係である。

代表元の取り方に依存しないこと $\langle (q_1, p_1) \rangle = \langle (q'_1, p'_1) \rangle$, $\langle (q_2, p_2) \rangle = \langle (q'_2, p'_2) \rangle$ とする。同値関係 \approx の定義より $p_1 q'_1 = p'_1 q_1$, $p_2 q'_2 = p'_2 q_2$ となるので、

$$\begin{aligned} (p_1 p_2) (q'_1 p'_2 + q'_2 p'_1) &= (p_1 q'_1) (p_2 p'_2) + (p_1 p'_1) (p_2 q'_2) \\ &= (p'_1 q_1) (p_2 p'_2) + (p_1 p'_1) (p'_2 q_2) = (p'_1 p'_2) (q_1 p_2 + q_2 p_1) \end{aligned}$$

と同値関係 \approx の定義より

$$\langle (q_1 p_2 + q_2 p_1, p_1 p_2) \rangle = \langle (q'_1 p'_2 + q'_2 p'_1, p'_1 p'_2) \rangle$$

が得られる。したがって、和 $+$ は代表元の取り方によらずにうまく定義できている。 ■