解析学 I　解答例

2013.10.29

■　数列 $\{ x_n \}$ を

$$x_1 = \alpha \in \mathbb{C}, \qquad x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{1}{x_n} \right) \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

により定める．

(1)　$y_n = \dfrac{x_n - 1}{x_n + 1}$ とおくとき，y_n と y_{n+1} の関係式を求めよ．

(2)　数列 $\{ y_n \}$ の一般項を求めよ．

(3)　$\displaystyle\lim_{n \to +\infty} x_n = 1$ となる α の範囲を求めよ．

(解) (1) 与えられた漸化式より

$$y_{n+1} = \frac{x_{n+1} - 1}{x_{n+1} + 1} = \frac{\frac{1}{2} \left(x_n + \frac{1}{x_n} \right) - 1}{\frac{1}{2} \left(x_n + \frac{1}{x_n} \right) + 1} = \frac{x_n^2 - 2\,x_n + 1}{x_n^2 + 2\,x_n + 1} = \left(\frac{x_n - 1}{x_n + 1} \right)^2 = y_n^2$$

となる．(2) $y_1 = \dfrac{\alpha - 1}{\alpha + 1}$ であり，

$$y_1 = y_1^{2^0}, \qquad y_2 = y_1^2 = y_1^{2^1}, \qquad y_3 = y_2^2 = y_1^{2^1 \cdot 2} = y_1^{2^2}, \qquad y_4 = y_3^2 = y_1^{2^2 \cdot 2} = y_1^{2^3}, \quad \cdots$$

であるから，

$$y_n = y_1^{2^{n-1}} = \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} \right)^{2^{n-1}}, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

と推測でき，その妥当性は数学的帰納法を用いて示せる．(3)

$$|\, y_n \,| = \left| \frac{x_n - 1}{x_n + 1} \right| = \frac{|\, x_n - 1 \,|}{|\, x_n + 1 \,|}, \qquad |\, x_n - 1 \,| = \left| \frac{2\, y_n}{1 - y_n} \right| = \frac{2\, |\, y_n \,|}{|\, 1 - y_n \,|}$$

より，与えられた条件と $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} |\, y_n \,| = 0$ は同値であることに注意したい．$r \geq 0$，$\theta \in [0, 2\,\pi)$ を用いて $\dfrac{\alpha - 1}{\alpha + 1} = r\, e^{i\,\theta}$ と表すことができ，

$$|\, y_n \,| = \left| \left(r\, e^{i\,\theta} \right)^{2^{n-1}} \right| = \left| r^{2^{n-1}}\, e^{i\, 2^{n-1}\, \theta} \right| = r^{2^{n-1}}$$

であるから，$r < 1$ でなければならない．

$$\frac{|\, \alpha - 1 \,|}{|\, \alpha + 1 \,|} = \left| \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} \right| = r < 1$$

より

$$0 < |\, \alpha + 1 \,|^2 - |\, \alpha - 1 \,|^2 = (\alpha + 1)\, (\overline{\alpha} + 1) - (\alpha - 1)\, (\overline{\alpha} - 1) = 2\, (\alpha + \overline{\alpha}) = 4\, \mathrm{Re}\, \alpha$$

となるので，求める範囲は $\mathrm{Re}\, \alpha > 0$ である．■