解析学 I　解答例

2013.11.05

■　数列 $\{ f_n \}$ を

$$f_1 = 1, \qquad f_2 = 1, \qquad f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

により定めるとき，一般項 f_n を求めよ．

(解)　特性方程式 $x^2 = x + 1$ の解は

$$\alpha = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \qquad \beta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

であり，$\alpha + \beta = 1$，$\alpha\,\beta = -1$ である．

$$\begin{aligned} f_{n+2} - \alpha\, f_{n+1} =& f_{n+1} + f_n - \alpha\, f_{n+1} = (1-\alpha)\, f_{n+1} - \alpha\,\beta\, f_n = \beta\,(f_{n+1} - \alpha\, f_n), \\ f_{n+2} - \beta\, f_{n+1} =& f_{n+1} + f_n - \beta\, f_{n+1} = (1-\beta)\, f_{n+1} - \alpha\,\beta\, f_n = \alpha\,(f_{n+1} - \beta\, f_n) \end{aligned}$$

より，数列 $\{ f_{n+1} - \alpha\, f_n \}$ および $\{ f_{n+1} - \beta\, f_n \}$ はそれぞれ公比 β および α の等比数列であるから，

$$f_{n+1} - \alpha\, f_n = \beta^{n-1}\,(f_2 - \alpha\, f_1) = \beta^n, \qquad f_{n+1} - \beta\, f_n = \alpha^{n-1}\,(f_2 - \beta\, f_1) = \alpha^n$$

となり，

$$f_n = \frac{\beta^n - \alpha^n}{\beta - \alpha} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right\}$$

である．■