解析学 I　解答例

2013.11.12

■　2 次元ベクトル $\mathbf{v}_1$，$\mathbf{v}_2$ が一次独立ならば，$\det(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \neq 0$ が成り立つことを示せ．

(解)　任意の α_1，α_2 に対して

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 = \mathbf{0} \qquad \Longleftrightarrow \qquad (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)\begin{pmatrix}\alpha_1 \\ \alpha_2\end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

であることに注意したい．$\mathbf{v}_1$，$\mathbf{v}_2$ が一次独立，かつ，$\det(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = 0$ であると仮定する．$\det(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = 0$ より

$$(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)\begin{pmatrix}\alpha_1 \\ \alpha_2\end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

は非自明な解をもち，その解は $\alpha_1 \neq 0$ または $\alpha_2 \neq 0$ である．一方，$\mathbf{v}_1$，$\mathbf{v}_2$ は一次独立であるから，$\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ となり，矛盾である．したがって，$\mathbf{v}_1$，$\mathbf{v}_2$ が一次独立ならば，$\det(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \neq 0$ が成り立つ．■