解析学 I　解答例

2013.11.26

■　A を 2×2 行列とし，α を A の固有値，$\mathbf{v}$ を A の α に対応する固有ベクトルとする．このとき，

$$1=\dim\mathrm{Ker}(A-\alpha\,E)<\dim\mathrm{Ker}(A-\alpha\,E)^2=2$$

ならば，連立方程式 $(A-\alpha\,E)\,\mathbf{x}=\mathbf{v}$ は解をもつかどうか調べよ．

(解)　仮定より，$\mathrm{Ker}(A-\alpha\,E)=\{\,\beta\,\mathbf{v}\mid\beta\in\mathbb{K}\,\}$ であり，

$$\mathbf{y}\in\mathrm{Ker}(A-\alpha\,E)^2,\qquad \mathbf{y}\notin\mathrm{Ker}(A-\alpha\,E)$$

をみたす $\mathbf{y}$ が存在する．

$$\mathbf{0}=(A-\alpha\,E)^2\,\mathbf{y}=(A-\alpha\,E)\;[(A-\alpha\,E)\,\mathbf{y}]$$

より $(A-\alpha\,E)\,\mathbf{y}\in\mathrm{Ker}(A-\alpha\,E)$ であるから，ある $\beta\in\mathbb{K}$ が存在して，$(A-\alpha\,E)\,\mathbf{y}=\beta\,\mathbf{v}$ が成り立つ．$\beta=0$ ならば，$\mathbf{y}\in\mathrm{Ker}(A-\alpha\,E)$ となり，矛盾である．したがって，$\beta\neq 0$ である．$\mathbf{x}=\mathbf{y}/\beta$ とおくと，

$$(A-\alpha\,E)\,\mathbf{x}=\frac{1}{\beta}\cdot\{(A-\alpha\,E)\,\mathbf{y}\}=\frac{1}{\beta}\cdot(\beta\,\mathbf{v})=\mathbf{v}$$

となる．■