解析学 I　解答例

2013.12.03

■　p，q，r を実数とし，4 項間の漸化式

$$x_{n+3} = p\,x_{n+2} + q\,x_{n+1} + r\,x_n, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

から得られる 3×3 行列の特性方程式を求めよ．また，3 項間の漸化式

$$x_{n+2} = 2\,x_{n+1} - x_n, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

の一般項を求めよ．

（解）　前半： $y_n = x_{n+1}$，$z_n = x_{n+2}$ とおくと，

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_n \\ z_n \\ x_{n+3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_n \\ z_n \\ p\,z_n + q\,y_n + r\,x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ r & q & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$$

であるから，求める特性方程式は

$$\begin{aligned} 0 = \det \left(\lambda\,E - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ r & q & p \end{pmatrix} \right) &= \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -r & -q & \lambda - p \end{pmatrix} \\ &= \lambda^2 \,(\lambda - p) - r - q\,\lambda = \lambda^3 - p\,\lambda - q\,\lambda - r \end{aligned}$$

である．

前半： 与えられた漸化式より

$$x_{n+1} - x_n = x_n - x_{n-1} = \cdots = x_2 - x_1, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

となるので，数列 $\{\,x_n\,\}$ は初項 x_1，公差 $x_2 - x_1$ の等差数列であるから，一般項 x_n は

$$x_n = x_1 + (n-1)\,(x_2 - x_1) = n\,(x_2 - x_1) + 2\,x_1 - x_2$$

と表せる．■