

解析学 I 解答例

2013.12.10

■ γ は $0 \leq \gamma < 1$ を, α は $0 \leq \alpha \leq 1$ をみたす. 数列 $\{x_n\}$ を

$$x_1 = \alpha, \quad x_{n+1} = \gamma x_n (1 - x_n) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

により定義するとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ が成り立つことを示せ.

(解) $f(x) = \gamma x(1 - x)$ とおくと,

$$f(x) = -\gamma \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{\gamma}{4}$$

より, $f(x)$ による区間 $I = [0, 1]$ の像 $f(I)$ は $f(I) \subset [0, \gamma/4] \subset I$ をみたすことに注意したい. $x_1 = \alpha \in [0, 1]$ であり, $x_n \in I$ ならば $x_{n+1} = f(x_n) \in I$ であるから, 数学的帰納法により, すべての自然数 n に対して $x_n \in I$ が成り立つ. したがって, すべての自然数 n に対して $0 \leq \gamma(1 - x_n) \leq \gamma$ であるから,

$$0 \leq x_n \leq \gamma x_{n-1} \leq \gamma^2 x_{n-2} \leq \dots \leq \gamma^{n-1} x_1 = \gamma^{n-1} \alpha$$

となり, はさみうちの原理と $0 \leq \gamma < 1$ より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$$

が得られる. ■