# 解析学 I　解答例

2013.12.17

■　$0 < x_1 < 1$ とし，数列 $\{x_n\}$ を

$$x_{n+1} = 2\,x_n\,(1 - x_n), \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

により定めるとき，極限 $\lim_{n\to\infty} x_n$ を求めよ．

**(解)**　与えられた漸化式は

$$x_{n+1} = -2\left(x_n - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} = -\frac{(2\,x_n - 1)^2 + 1}{2}$$

と表せるので，$y_n = |\,2\,x_n - 1\,|$ とおくと，数列 $\{\,y_n\,\}$ は

$$y_{n+1} = |\,2\,x_{n+1} - 1| = \left| -(2\,x_n - 1)^2 \right| = y_n^2, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

をみたす．

$$y_1 = y_1^{2^0}, \qquad y_2 = y_1^2 = y_1^{2^1}, \qquad y_3 = \left(y_1^{2^1}\right)^2 = y_1^{2^2}, \qquad y_4 = \left(y_1^{2^2}\right)^2 = y_1^{2^3}, \quad \cdots$$

より，一般項 $y_n$ は $y_n = y_1^{2^{n-1}}$ と推測できる．数学的帰納法を用いることにより，その妥当性が証明できるが，この解答例では省略する．$0 < x_1 < 1$ より

$$-1 < 2\cdot 0 - 1 < 2\,x_1 - 1 < 2\cdot 1 - 1 = 1, \qquad \text{つまり，} \quad 0 \le y_1 < 1$$

であるから，

$$\lim_{n\to\infty}\left|x_n - \frac{1}{2}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{2} = \lim_{n\to\infty}\frac{y_1^{2^{n-1}}}{2} = 0$$

となるので，

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{2}$$

である．■