解析学 I　解答例

2014.01.07

■　$p(x)$ を実数 a_k （$k=0$，1，$\cdots$，$n-1$）を係数とする多項式

$$p(x)=x^n+a_{n-1}\,x^{n-1}+a_{n-1}\,x^{n-2}+\cdots+a_1\,x+a_0$$

とし，

$$M=N+1, \qquad N=\max\left(|\,a_0\,|\,,|\,a_1\,|\,,\cdots,|\,a_{n-1}\,|\right)$$

とおく．このとき，方程式 $p(x)=0$ の任意の解 α は $|\,\alpha\,|\leq M$ をみたすことを示せ．

(解)　$|\,x\,|>M$ をみたす方程式 $p(x)=0$ の解 α が存在すると仮定すると，$0\leq N<|\,\alpha\,|-1$ より

$$\begin{aligned}|\,\alpha\,|^n &=|\,-\alpha^n\,|=\left|\,a_{n-1}\,\alpha^{n-1}+a_{n-2}\,\alpha^{n-2}+\cdots+a_1\,\alpha+a_0\,\right|\\ &\leq|\,a_{n-1}\,|\,|\,\alpha\,|^{n-1}+|\,a_{n-2}\,|\,|\,\alpha\,|^{n-2}+\cdots+|\,a_1\,|\,|\,\alpha\,|+|\,a_0\,|\\ &\leq N\,|\,\alpha\,|^{n-1}+N\,|\,\alpha\,|^{n-2}+\cdots+N\,|\,\alpha\,|+N\\ &=\frac{N\,(|\,\alpha\,|^n-1)}{|\,\alpha\,|-1}<\frac{N\,(|\,\alpha\,|^n-1)}{N}=|\,\alpha\,|^n-1<|\,\alpha\,|^n\end{aligned}$$

となり，矛盾である．したがって，方程式 $p(x)=0$ の任意の解 α は $|\,\alpha\,|\leq M$ をみたす．■