解析学 I　解答例

2014.01.14

■　数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

により定義する.

(1)　a_n は

$$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)$$

と表せることを示せ.

(2)　$\{a_n\}$ は単調増加数列であることを示せ.

(解) (1) 二項定理より

$$\begin{aligned}
a_n =& \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k \left(\frac{1}{n}\right)^k = 1 + \sum_{k=1}^{n} {}_nC_k \left(\frac{1}{n}\right)^k \\
=& 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^k \\
=& 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)
\end{aligned}$$

となる. (2) すべての k, $n \in \mathbb{N}$　$(1 \leq k < n)$ に対して

$$0 < 1 - \frac{k}{n} < 1 - \frac{k}{n+1}$$

であるから, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned}
a_{n+1} =& 1 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right) \\
>& 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right) \\
>& 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) = a_n
\end{aligned}$$

となる. ■