解析学 I　解答例

2014.01.21

■　$x_1 = \dfrac{1}{2}$ とし，数列 $\{ x_n \}$ を

$$x_{n+1} = x_n \, (1 - x_n), \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

により定めるとき，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n$ を求めよ．

(解)　与えられた漸化式から

$$x_{n+1} - x_n = -x_n^2 \le 0, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

と表せるので，$\{ x_n \}$ は単調減少数列である．明らかに，$0 \le x_1 \le 1/2$ である．$0 \le x_n \le 1/2$ とすると，

$$0 \le x_{n+1} = x_n \, (1 - x_n) \le x_n \le \frac{1}{2}$$

が得られる．数学的帰納法により，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $0 \le x_n \le 1/2$ である，つまり，$\{ x_n \}$ は下に有界である．したがって，極限 $x_* = \lim_{n\to\infty} x_n$ が存在する．

(1) $x_* > 0$ とする．$\varepsilon = x_*/2 > 0$ に対して，極限の定義を適用すると，ある $n_1 \in \mathbb{N}$ が存在し，すべての自然数 $n \ge n_1$ に対して

$$|\, x_n - x_* \,| < \varepsilon = \frac{x_*}{2}, \qquad \text{つまり,} \quad \frac{x_*}{2} < x_n$$

が成り立つ．$n \ge n_1$ のとき

$$x_n = x_{n-1} - x_{n-1}^2 < x_{n-1} - \frac{x_*^2}{4} < x_{n-2} - \frac{2\,x_*^2}{4} < \cdots < x_{n_1} - \frac{(n - n_1)\, x_*^2}{4}$$

であるから，$n > n_1 + 4\,x_{n_1}/x_*^2$ のとき $x_n < 0$ となり，矛盾である．したがって，$x_* \le 0$ である．

(2) $x_* < 0$ とする．$\varepsilon = |\, x_* \,|/2 > 0$ に対して，極限の定義を適用すると，ある $n_2 \in \mathbb{N}$ が存在し，すべての自然数 $n \ge n_2$ に対して

$$|\, x_n - x_* \,| < \varepsilon = \frac{|\, x_* \,|}{2}, \qquad \text{つまり,} \quad x_n < x_* + \frac{|\, x_* \,|}{2} = -\frac{|\, x_* \,|}{2} < 0$$

となり，矛盾である．したがって，$x_* \ge 0$ である．

以上から，$x_* = 0$ となるので，$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ である．■