

解析学 I 解答例

2014.01.28

■ 数列 $\{b_k\}$, $\{c_k\}$ が, ある $M > 0$ に対して

$$-M \leq b_k \leq b_{k+1} \leq c_{k+1} \leq c_k \leq M, \quad c_{k+1} - b_{k+1} = \frac{c_k - b_k}{2}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

をみたすとき, 極限 $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k$, $\lim_{k \rightarrow \infty} c_k$ が存在し, $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = \lim_{k \rightarrow \infty} c_k$ をみたすことを示せ.

(解) $\{b_k\}$ は上に有界な単調増加数列, $\{c_k\}$ は下に有界な単調減少数列であるから, 実数の連続性より極限 $b_* = \lim_{k \rightarrow \infty} b_k$, $c_* = \lim_{k \rightarrow \infty} c_k$ が存在する.

$$c_k - b_k = \frac{c_{k-1} - b_{k-1}}{2} = \frac{c_{k-2} - b_{k-2}}{2^2} = \dots = \frac{c_1 - b_1}{2^{k-1}}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

より

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (c_k - b_k) = 0$$

であるから,

$$c_* = \lim_{k \rightarrow \infty} c_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \{b_k + (c_k - b_k)\} = \lim_{k \rightarrow \infty} b_k + \lim_{k \rightarrow \infty} (c_k - b_k) = b_* + 0 = b_*$$

が得られる. したがって, $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = \lim_{k \rightarrow \infty} c_k$ である. ■