解析学 I　解答例

2014.02.04

■　$1 < \gamma < 2$ とする．数列 $\{ x_n \}$ を

$$x_1 = \frac{1}{2}, \qquad x_{n+1} = \gamma\, x_n\, (1 - x_n) \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

により定義するとき，極限 $\lim_{n\to\infty} x_n$ を調べよ．

(解) $\gamma_* = (\gamma - 1)/\gamma$, $f(x) = \gamma\, x\,(1-x)$ とおくと，$0 < \gamma_* < 1/2$, $f(\gamma_*) = \gamma_*$ である．第 7 回 (2013.12.10) の小テストと同様にして，$f(x)$ による区間 $I = [\gamma_*, 1/2]$ の像 $f(I)$ は $f(I) \subset I$ をみたすことが示せる．$x_1 = 1/2 \in I$ であり，$x_n \in I$ ならば $x_{n+1} = f(x_n) \in I$ であるから，数学的帰納法により，すべての自然数 n に対して $x_n \in I$，つまり，$\gamma_* \le x_n \le 1/2$ が成り立つ．したがって，$\{ x_n \}$ は有界な数列である．また，

$$x_{n+1} - x_n = \gamma\, x_n\, (1 - x_n) - x_n = \gamma\, x_n\, (\gamma_* - x_n) \le 0 \tag{E}$$

より，$\{ x_n \}$ は単調減少な数列である．実数の連続性により，極限 $x_* = \lim_{n\to\infty} x_n$ が存在する．

(1) $x_* > \gamma_*$ とし，$\delta = \gamma\,(x_*^2 - \gamma_*^2)/4 > 0$ とおく．$\varepsilon = (x_* - \gamma_*)/2 > 0$ に対して，極限の定義を適用すると，ある $n_1 \in \mathbb{N}$ が存在し，すべての自然数 $n \ge n_1$ に対して

$$|\, x_n - x_* \,| < \varepsilon = \frac{x_* - \gamma_*}{2}, \qquad \text{つまり,} \quad \frac{x_* + \gamma_*}{2} < x_n$$

であるから，(E) より，すべての $n \ge n_1$ に対して

$$x_{n+1} - x_n < \gamma \cdot \frac{x_* + \gamma_*}{2} \cdot \left(\gamma_* - \frac{x_* + \gamma_*}{2} \right) = -\delta$$

が成り立つ．ここで，$n \in \mathbb{N}$ を $n \ge n_1 + x_{n_1}/\delta$ となるように十分に大きくとると，

$$x_n = x_{n_1} + \sum_{k=n_1}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) \le (n - n_1)\,\delta + \sum_{k=n_1}^{n-1} (-\delta) = 0$$

となり，矛盾である．したがって，$x_* \le \gamma_*$ である．

(2) $x_* < \gamma_*$ とする．$\varepsilon = (\gamma_* - x_*)/2 > 0$ に対して，極限の定義を適用すると，ある $n_2 \in \mathbb{N}$ が存在し，すべての自然数 $n \ge n_2$ に対して

$$|\, x_n - x_* \,| < \varepsilon = \frac{\gamma_* - x_*}{2}, \qquad \text{つまり,} \quad x_n < \frac{\gamma_* + x_*}{2} < \gamma_*$$

となり，矛盾である．したがって，$x_* \ge \gamma_*$ である．

以上から，$x_* = \gamma_*$ となるので，$\lim_{n\to\infty} x_n = \gamma_*$ である．■