

解析学 II 解答例

2013.04.15

■ $a > 0, b > 0, r > 0$ とする. 辺の長さが a, b の長方形を半径 r の (境界は含まれない) 円盤で覆うとき, 覆うのに必要な円盤の個数を評価せよ.

(解) 覆うのに必要な円盤の個数を $N(r)$ とする. 半径 r の円盤の面積は πr^2 であるから, $N(r) \geq ab/(\pi r^2)$ でなければ覆うことはできない. また, 半径 r の円盤は一辺が $\sqrt{2}r$ の正方形を含んでおり, その正方形を重なりをもつように並べたと考えると,

$$N(r) \leq \left(\frac{a}{\sqrt{2}r} + 1 \right) \left(\frac{b}{\sqrt{2}r} + 1 \right)$$

であれば覆うことができる. このことから,

$$\frac{ab}{\pi} \leq r^2 N(r) \leq \frac{(a + \sqrt{2}r)(b + \sqrt{2}r)}{2}$$

であり,

$$\lim_{r \rightarrow +0} (r^\ell N(r)) = \begin{cases} +\infty & (\ell < 2) \\ 0 & (\ell > 2) \end{cases}$$

が得られる. ■