解析学 II　解答例

2013.04.22

■　整数 a_k （$k = 1$，2，$\cdots$，n）を係数とする多項式

$$p(x) = x^n + a_1\, x^{n-1} + a_2\, x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\, x + a_n$$

に対して，方程式 $p(x) = 0$ が有理数解をもてば，その解は整数であることを示せ．

(解)　方程式 $p(x) = 0$ が有理数解 α は，互いに素な $u \in \mathbb{Z}$，$v \in \mathbb{N}$ を用いて，$\alpha = u/v$ と表すことができる．$v \geq 2$ と仮定する．$p(u/v) = 0$ より

$$u^n = -v\,\left(a_1\, u^{n-1} + a_2\, u^{n-2}\, v + a_3\, u^{n-3}\, v^2 + \cdots + a_{n-1}\, u\, v^{n-2} + a_n\, v^{n-1}\right)$$

が得られ，u^n は v で割り切れる．$\hat{v} \geq 2$ を v の任意の素因数とすると，u は $\hat{v}$ で割り切れなければならない．つまり，u と v の最大公約数は $\hat{v}$ 以上である．これは u と u が互いに素であることに反する．したがって，$v = 1$ である，つまり，解 $\alpha = u \in \mathbb{Z}$ である．■