解析学 II　解答例

2013.05.07

■　x，y を実数とするとき，次の命題が真の場合には証明を，偽の場合には反例を示せ．

(1)　$|\,x\,|^2 + |\,y\,|^2 \leq 1$ ならば $|\,x\,|^3 + |\,y\,|^3 \leq 1$ である．

(2)　$|\,x\,|^3 + |\,y\,|^3 \leq 1$ ならば $|\,x\,|^2 + |\,y\,|^2 \leq 1$ である．

(3)　$x^2 + y^2 \leq 1$ ならば $x^3 + y^3 \leq 1$ である．

(解)　(1) 真である．$|\,x\,|^2 + |\,y\,|^2 \leq 1$ より $|\,x\,| \leq 1$，$|\,y\,| \leq 1$ であるから，$|\,x\,|^3 \leq |\,x\,|^2$，$|\,y\,|^3 \leq |\,y\,|^2$ が成り立ち，

$$|\,x\,|^3 + |\,y\,|^3 \leq |\,x\,|^2 + |\,y\,|^2 \leq 1$$

となる．(2) 偽である．$x = 2^{-\frac{1}{3}}$，$y = 2^{-\frac{1}{3}}$ は

$$|\,x\,|^3 + |\,y\,|^3 = 2 \cdot \left(2^{-\frac{1}{3}}\right)^3 = 2 \cdot 2^{-1} = 1, \qquad |\,x\,|^2 + |\,y\,|^2 = 2 \cdot \left(2^{-\frac{1}{3}}\right)^2 = 2 \cdot 2^{-\frac{2}{3}} = 2^{\frac{1}{3}} > 1^{\frac{1}{3}} = 1$$

をみたし，反例である．(3) 真である．$x \leq |\,x\,|$，$y \leq |\,y\,|$ であることに注意すると，(1) と

$$|\,x\,|^2 + |\,y\,|^2 = x^2 + y^2 \leq 1$$

より $|\,x\,|^3 + |\,y\,|^3 \leq 1$ が成り立つので，

$$x^3 + y^3 \leq |\,x\,|^3 + |\,y\,|^3 \leq 1$$

が得られる．■