解析学 II　解答例

2013.05.20

■　各自然数 n に対して $f_n(x)$ を

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \left(0 \le x < \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{n}\right) \\ \dfrac{n}{2}\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) + \dfrac{1}{2} & \left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{n} \le x \le \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{1}{n}\right) \\ 1 & \left(\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{1}{n} < x \le \pi\right) \end{cases}$$

により定めるとき，

$$\sup_{0\le x\le\pi} |\, f_n(x) - f_m(x)\,|, \qquad \int_0^\pi |\, f_n(x) - f_m(x)\,|\, dx$$

を求めよ．

（解）　$n > m$ のときを考えると，関数 $y = f_n(x)$ のグラフから，関数 $|\, f_n(x) - f_m(x)\,|$ は $x = \dfrac{\pi}{2} \pm \dfrac{1}{n}$ で最大値を取り，その値は

$$\left| f_n\left(\frac{\pi}{2} \pm \frac{1}{n}\right) - f_m\left(\frac{\pi}{2} \pm \frac{1}{n}\right) \right| = \left| \frac{n}{2}\left(\pm\frac{1}{n}\right) - \frac{m}{2}\cdot\left(\pm\frac{1}{n}\right) \right| = \left| \pm\frac{1}{2}\left(1 - \frac{m}{n}\right) \right| = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{m}{n}\right)$$

となる．したがって，

$$\sup_{0\le x\le\pi} |\, f_n(x) - f_m(x)\,| = \max\left\{\frac{1}{2}\cdot\left(1 - \frac{m}{n}\right), \frac{1}{2}\cdot\left(1 - \frac{n}{m}\right)\right\}$$

である．$f_n(x)$ と $f_m(x)$ で囲まれた面積を求めることにより，

$$\int_0^\pi |\, f_n(x) - f_m(x)\,|\, dx = \frac{1}{2}\left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right|$$

が得られる．■