# 解析学 II　解答例

2013.05.27

■　関数 $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ を $f(0) = 0$ をみたす狭義単調増加関数とし，$g(x)$ を $f(x)$ の逆関数とする．このとき，任意の $a \geq 0$，$b \geq 0$ に対して

$$a\,b \leq \int_0^a f(s)\,ds + \int_0^b g(t)\,dt$$

が成り立つことを示せ．また，$p$，$q$ を関係式

$$p > 1, \qquad q > 1, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

をみたす実数とするとき，任意の $x \geq 0$，$y \geq 0$ に対して

$$x\,y \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$$

が成り立つことを示せ．

**（解）** 任意の $p \geq 0$ に対して，曲線 $y = f(x)$，$y = 0$，$x = p$ で囲まれた面積が $\int_0^p f(s)\,ds$ であり，曲線 $y = f(x)$，$y = p$，$x = 0$ で囲まれた面積が $\int_0^p g(t)\,dt$ であることに注意すると，

$$p\,f(p) = \int_0^p f(s)\,ds + \int_0^{f(p)} g(t)\,dt$$

が成り立つ．(i) $f(a) \leq b$ のときを考える．$f(x)$ が狭義単調増加であるから，その逆関数である $g(x)$ も狭義単調増加である．$f(a) \leq y$ ならば $a = g(f(a)) \leq g(y)$ が成り立つので，

$$\begin{aligned}\int_0^a f(s)\,ds + \int_0^b g(t)\,dt &= \int_0^a f(s)\,ds + \int_0^{f(a)} g(t)\,dt + \int_{f(a)}^b g(t)\,dt \\ &= a\,f(a) + \int_{f(a)}^b g(t)\,dt \geq a\,f(a) + \int_{f(a)}^b a\,dt = a\,b\end{aligned}$$

が得られる．(ii) $f(a) > b$ のときを考える．$c = g(b)$ とおくと，$f(c) = f(g(b)) = b$ である．$c \geq a$ とすると，$f(x)$ は単調増加であるから，$b = f(c) \geq f(a) > b$ となり矛盾である．したがって，$c < a$ であるから，

$$\begin{aligned}\int_0^a f(s)\,ds + \int_0^b g(t)\,dt &= \int_0^c f(s)\,ds + \int_c^a f(s)\,ds + \int_0^{f(c)} g(t)\,dt \\ &= c\,f(c) + \int_c^a f(s)\,ds \geq c\,b + \int_c^a b\,ds = a\,b\end{aligned}$$

が成り立つ．また，$p$，$q$ がみたす関係式より

$$q - 1 = \frac{p}{p-1} - 1 = \frac{1}{p-1}$$

であることに注意したい．$f(x) = x^{p-1}$ とすると，$g(x) = x^{\frac{1}{p-1}} = x^{q-1}$ であり，

$$x\,y \leq \int_0^x s^{p-1}\,ds + \int_0^y t^{q-1}\,dt = \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$$

が成り立つ．■