解析学 II　解答例

2013.06.03

■ x，y を実数とする．$|\,x\,| + |\,y\,| \leq 1$ ならば，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $x^n + y^n \leq 1$ であることを示せ．

(解) 仮定より $|\,x\,| \leq 1$，$|\,y\,| \leq 1$ であるから，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して，$|\,x\,|^n \leq |\,x\,|$，$|\,y\,|^n \leq |\,y\,|$ が成り立ち，

$$|\,x\,|^n + |\,y\,|^n \leq |\,x\,| + |\,y\,| \leq 1$$

が得られる．(a) n が偶数のときには，$|\,x\,|^n = x^n$，$|\,y\,|^n = y^n$ であるから，$x^n + y^n \leq 1$ となる．(b) n が奇数のときには，関数 $y = x^n$ は単調増加であるから，$x \leq |\,x\,|$，$y \leq |\,y\,|$ より $x^n \leq |\,x\,|^n$，$y^n \leq |\,y\,|^n$ が得られ，

$$x^n + y^n \leq |\,x\,|^n + |\,y\,|^n \leq 1$$

が成り立つ．■