解析学 II　解答例

2013.06.10

■　$\mathbf{x} = (x_j)$ を n 次元ベクトル，A を $n \times n$ 行列とするとき，$\|\mathbf{x}\|_\infty$ と $\|A\|_\infty$ をそれぞれ

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_n|), \qquad \|A\|_\infty = \sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \frac{\|A\mathbf{x}\|_\infty}{\|\mathbf{x}\|_\infty}$$

により定義する．このとき，次が成り立つことを示せ．

(1)　$\|A\|_\infty = O$ であるための必要十分条件は $A = 0$ である．

(2)　すべての $\mathbf{x}$ に対して $\|A\mathbf{x}\|_\infty \leq \|A\|_\infty \|\mathbf{x}\|_\infty$ が成り立つ．

（解） (1)（$\Longrightarrow$） $\|\mathbf{x}\|_\infty$ と $\|A\|_\infty$ の定義より，すべての $\mathbf{x}$ に対して，

$$0 = \|A\|_\infty \geq \frac{\|A\mathbf{x}\|_\infty}{\|\mathbf{x}\|_\infty} \geq 0$$

より $\|A\mathbf{x}\|_\infty = 0$ であり，$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ が成り立つ．したがって，$A = O$ である．
（$\Longleftarrow$） すべての $\mathbf{x}$ に対して，$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ より $\|A\mathbf{x}\|_\infty = 0$ であるから，

$$\|A\|_\infty = \sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{0}\|_\infty}{\|\mathbf{x}\|_\infty} = \sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} 0 = 0$$

である．

(2) $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ のとき，$\|A\|_\infty$ の定義より

$$\|A\|_\infty \geq \frac{\|A\mathbf{x}\|_\infty}{\|\mathbf{x}\|_\infty}, \qquad \text{つまり，} \quad \|A\mathbf{x}\|_\infty \leq \|A\|_\infty \|\mathbf{x}\|_\infty$$

が成り立つ．$\mathbf{x} = \mathbf{0}$ のとき $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ より $\|A\mathbf{x}\|_\infty = 0 \leq 0 = \|A\|_\infty \|\mathbf{x}\|_\infty$ であるから，すべての $\mathbf{x}$ に対して $\|A\mathbf{x}\|_\infty \leq \|A\|_\infty \|\mathbf{x}\|_\infty$ が成り立つ．■