

解析学 II 解答例

2013.06.17

■ 2×2 実行列 A の固有値を λ_1, λ_2 ($\lambda_1 \neq \lambda_2$) とする. 対応する A の固有ベクトルをそれぞれ $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ とし, $P = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ とおく.

(1) $\det P \neq 0$ であることを示せ.

(2) $P^{-1}AP$ を求めよ.

(解) (1) $\mathbf{x}_1$ と $\mathbf{x}_2$ は一次独立であり, 非自明なベクトルであることに注意したい. $\det P = 0$ であると仮定すると, ある複素数 $p \neq 0$ が存在して $\mathbf{x}_1 = p\mathbf{x}_2$ が成り立つので, $\mathbf{x}_1$ と $\mathbf{x}_2$ は一次従属である. したがって, $\det P \neq 0$ でなければならない. (2)

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= P^{-1}A(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = P^{-1}(A\mathbf{x}_1, A\mathbf{x}_2) = P^{-1}(\lambda_1\mathbf{x}_1, \lambda_2\mathbf{x}_2) \\ &= P^{-1}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = P^{-1}P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である. ■