

解析学 II 解答例

2013.06.24

■ 任意の実数 $\lambda \neq 0$ と自然数 n に対して

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$$

が成り立つことを示せ.

(解) 行列 J を

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

により定義すると, $J^2 = O$, $EJ = JE = J$ が成り立つので, 二項定理を適用して

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^n = (\lambda E + J)^n = \sum_{k=0}^n {}_n C_k (\lambda E)^{n-k} J^k = \lambda^n E + n\lambda^{n-1} J = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$$

となる. ■