解析学概論　解答例

2012.05.27

■　関数 $f_n(x)$，$g_n(x)$ を

$$f_n(x) = \cos n\,x, \qquad g_n(x) = \frac{\sin(n+1)\,x}{\sin x}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

により定義する．このとき，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して，$f_n(x)$ および $g_n(x)$ は n 次多項式 $P_n(X)$，$Q_n(X)$ を用いて

$$f_n(x) = P_n(\cos x), \qquad g_n(x) = Q_n(\cos x) \tag{E}$$

と表されることを示せ．

(解)　$X = \cos x$ とする．(1) 加法定理より

$$f_1(x) = \cos x = X, \qquad f_2(x) = 2\,\cos^2 x - 1 = 2\,X^2 - 1$$

と表される．したがって，$n = 1$ および $n = 2$ に対して $f_n(x)$ は (E) のように表現できる．(2) $n = \ell$ および $n = \ell + 1$ に対して $f_n(x)$ は (E) のように表現できる，つまり，ある ℓ 次多項式 $P_\ell(X)$ と $(\ell+1)$ 次多項式 $P_{\ell+1}(X)$ を用いて

$$f_\ell(x) = P_\ell(\cos x), \qquad f_{\ell+1}(x) = P_{\ell+1}(\cos x)$$

と表されると仮定する．加法定理より

$$\cos(\ell+2)\,x + \cos\ell\,x = 2\,\cos x\,\cos(\ell+1)\,x$$

であるから，

$$f_{\ell+2}(x) = 2\,\cos x\,f_{\ell+1}(x) - f_\ell(x) = 2\,X\,P_{\ell+1}(X) - P_\ell(X)$$

となり，$f_{\ell+2}(x)$ は X に関する $(\ell+2)$ 次多項式で表すことができる．したがって，$n = \ell+1$ および $n = \ell+2$ に対して $f_n(x)$ は (E) のように表現できる．数学的帰納法により，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $f_n(x)$ は (E) のように表現できる．

　また，加法定理より

$$\begin{aligned} g_1(x) =& \frac{2\,\sin x\,\cos x}{\sin x} = 2\,\cos x = 2\,X, \\ g_{n+1}(x) =& \frac{\sin(n+1)\,x\,\cos x + \cos(n+1)\,x\,\sin x}{\sin x} = g_n(x)\,\cos x + f_{n+1}(x) \end{aligned}$$

が得られるので，$f_n(x)$ と同様に数学的帰納法を用いて，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $g_n(x)$ は (E) のように表現できることが示せる．■