解析学概論　解答例

2012.06.03

■　各 $n \in \mathbb{N}_0$ に対して，$\Phi_n : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ を帰納的に

$$\Phi_n(0) = n, \qquad \Phi_n(S(m)) = S(\Phi_n(m)) \quad (m \in \mathbb{N}_0)$$

により定義する．このとき，すべての $n \in \mathbb{N}_0$ に対して Φ_n は単射であることを示せ．ここで，すべての n, $m \in \mathbb{N}_0$ に対して (a) $\Phi_0(n) = n = \Phi_n(0)$ および (b) $\Phi_{S(n)}(m) = \Phi_n(S(m))$ が成り立つことを用いてもよい．

（解） (1) $n = 0$ のとき，(a) より $\Phi_0(m) = m$ であるから，Φ_0 は単射である．(2) Φ_n が単射であると仮定する．$\Phi_{S(n)}(m_1) = \Phi_{S(n)}(m_2)$ ならば，

$$\Phi_n(S(m_1)) \overset{\text{(b)}}{=} \Phi_{S(n)}(m_1) = \Phi_{S(n)}(m_2) \overset{\text{(b)}}{=} \Phi_n(S(m_2))$$

と仮定より $S(m_1) = S(m_2)$ であり，ペアノの公理より S は単射であるから，$m_1 = m_2$ が成り立つ．したがって，$\Phi_{S(n)}$ は単射である．数学的帰納法より，すべての $n \in \mathbb{N}_0$ に対して Φ_n は単射である．■